

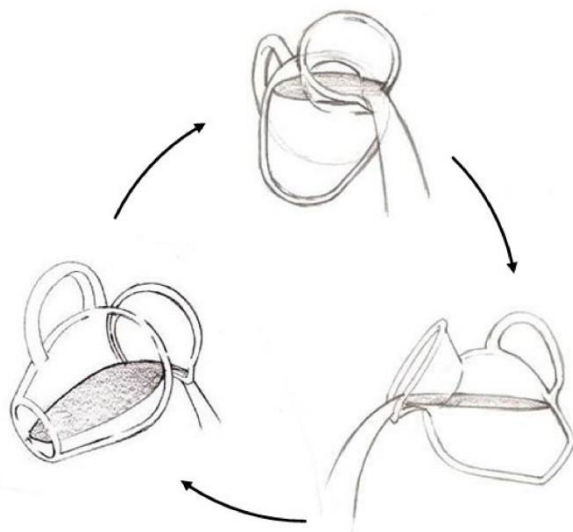
21 倒水問題…轉移矩陣

「每個元素都大於或等於 0，且每一行的和都是 1」的矩陣稱為「轉移矩陣」，例如

$$P = \begin{bmatrix} \frac{5}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

就是三階的轉移矩陣。在日常生活中，有許多事物都跟轉移矩陣相關，差別只在於我們無法與它連結起來而已。即使是中學課程，也很少舉出很漂亮的轉移矩陣的應用實例。這裡所要介紹的倒水問題就是一道典型，但不易被察覺的轉移矩陣實例：

有甲、乙及丙三個水瓶，分別裝有 a, b 及 c 公升的水。每一輪操作都是先將甲瓶的水倒出一半到乙瓶，再將乙瓶的水倒出一半到丙瓶，然後再將丙瓶的水倒出一半回甲瓶。



設 n 輪操作後，甲、乙及丙瓶的水有 a_n, b_n 及 c_n 公升，如何將 a_n, b_n 及 c_n 的公式表達出來，又一直操作下去，三瓶子裡的水會穩定下來嗎？如果會，那麼最終三瓶子會有水各幾公升？」

在思考倒水問題之前，先來做個軟身，試試看底下這道倒水問題（98 數乙指考試題）：
 設有 A、B 兩支大瓶子，開始時，A 瓶裝有 a 公升的純酒精，B 瓶裝有 b 公升的礦泉水。
 每一輪操作都是先將 A 瓶的溶液倒出一半到 B 瓶，然後再將 B 瓶的溶液倒出一半回
 A 瓶（不考慮酒精與水混合後體積的縮小）。設 n 輪操作後，A 瓶有 a_n 公升的溶液，B

瓶有 b_n 公升的溶液。已知二階方陣 $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ 滿足

$$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}.$$

(1) 求二階方陣

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

(2) 當 $a = \frac{2}{3}, b = \frac{1}{3}$ 時，求 a_{100} 及 b_{100} 。

(3) 當 $a = \frac{2}{3}, b = \frac{1}{3}$ 時，在第二輪操作後，A 瓶的溶液中有百分之多少的酒精？

有了這道聯考題的經驗，關於三階倒水問題是否會解了呢？

首先讓我們考慮第一輪操作後的水量 a_1, b_1, c_1 與初始值 a, b, c 的關係。根據倒水的規則，

可以些出它們之間的線性關係

$$\begin{cases} a_1 = \frac{5}{8}a + \frac{1}{4}b + \frac{1}{2}c \\ b_1 = \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}b + 0c \\ c_1 = \frac{1}{8}a + \frac{1}{4}b + \frac{1}{2}c \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}.$$

進一步可以得到

$$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix} = P^n \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}.$$

因為 P 是一個三階轉移矩陣，所以當操作一直進行下去時，三瓶子裡的水是會趨近穩定

狀態的。而且當穩定狀態時，三瓶子水量的比例 $x:y:z$ 會滿足

$$\begin{bmatrix} \frac{5}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},$$

即滿足方程組

$$\begin{cases} \frac{5}{8}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{2}z = x \\ \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}y + 0z = y \\ \frac{1}{8}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{2}z = z \end{cases}$$

解得 $x:y:z=2:1:1$ 。因為三瓶子裡的總水量是 $a+b+c$ 公升，所以甲、乙及丙三個水瓶在穩定狀態時的水量分別為

$$\frac{a+b+c}{2}, \frac{a+b+c}{4}, \frac{a+b+c}{4}$$

公升。

從上面的詮釋可知：倒水問題是一道不容易的趣題，它牽扯到矩陣的概念，而且是相當深的概念。在瓶子只有兩個時，得到的轉移矩陣是二階方陣，會比較好處理。